SOLUCIONES 2º EXAMEN PARCIAL
ANÁLISIS COMPLEJO
20-12-2013

1 Dada la serie de Laurent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n (z-3)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} n(z-3)^n,$$

determine su dominio de convergencia y calcule su suma en el mismo.

La serie converge en un dominio $\Omega_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-3| < R\}$, pues el centro de la serie es $z_0 = 3$, siendo:

$$r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1.$$

Luego, el dominio de convergencia es

$$\boxed{\Omega_{r,R} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z-3| < 1 \right\}}$$

Para cada $z \in \Omega_{r,R}$ se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(z-3)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2(z-3)}\right)^n$ es una serie geométrica de razón

$-\frac{1}{2(z-3)}$, luego: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(z-3)^n} = \frac{-\frac{1}{2(z-3)}}{1+\frac{1}{2(z-3)}} = \frac{1}{5-2z}$$

si $\left|-\frac{1}{2(z-3)}\right| < 1$, lo que equivale que $|z-3| > \frac{1}{2}$.

Por otra parte,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z-3)^n = \frac{1}{1-(z-3)} = \frac{1}{4-z} \quad \text{si } |z-3|<1,$$

y derivando en el disco de convergencia se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(z-3)^{n-1} = \frac{+1}{(4-z)^2} \quad \text{si } |z-3|<1 \xRightarrow{\boxed{\text{multiplicando por } z-3}} \sum_{n=1}^{\infty} n(z-3)^n = \frac{z-3}{(4-z)^2}$$

si $|z-3|<1$

En definitiva: si $z \in \Omega_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z-3| < 1\}$,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n (z-3)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} n(z-3)^n = \frac{1}{5-2z} + \frac{z-3}{(4-z)^2}} = \frac{-z^2+3z+1}{(5-2z)(4-z)^2}$$

2.- Halle el desarrollo en serie de Laurent, en $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ de la función

$$f(z) = \frac{1}{z+2i} + \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$\frac{1}{z+2i} = \frac{1}{2i} \frac{1}{\frac{z}{2i}+1} = \frac{1}{2i} \frac{1}{1-\frac{zi}{2}} \underset{\uparrow}{=} \frac{-i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{zi}{2}\right)^n$$

si $\left|-\frac{zi}{2}\right| < 1$

y dado que $\left|-\frac{zi}{2}\right| < 1 \iff |z| < 2$, se tiene:

$$\frac{1}{z+2i} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1} z^n \quad \text{si } |z| < 2$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad \text{si } |z| > 1.$$

si $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$

Derivando:

$$\frac{-1}{(z-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{z^{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{(n-1)}{z^n} \quad \text{si } |z| > 1$$

Por tanto,

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{n+1} z^n \quad \text{si } 1 < |z| < 2}$$

3.- Dada la función $f(z)=\dfrac{e^{i(z-\pi)}-1}{(z-\pi)\,z^2}$, se pide:

(a) Hallar sus ceros y clasificarlos.

Como f es un cociente de funciones, sus ceros son los ceros de la función del numerador que no son ceros del denominador, esto es:

$$C(f)=\{z\in\mathbb{C}\setminus\{0,\pi\}:\ e^{i(z-\pi)}=1\}=\{z\in\mathbb{C}\setminus\{0,\pi\}:\ i(z-\pi)=2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}\}$$
$$=\{(2k+1)\pi\ :\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$$

Veamos cuál es la derivada que no se anule en $\underline{w_k=(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$.

$$f'(z)=\frac{ie^{i(z-\pi)}(z-\pi)z^2-(e^{i(z-\pi)}-1)(z^2+(z-\pi)\cdot 2z)}{((z-\pi)\cdot z^2)^2}$$

$$f'(w_k)=\frac{ie^{i2k\pi}}{((2k+1)\pi-\pi)((2k+1)\pi)^2}=\frac{i}{2k(2k+1)^2\pi^3}\neq 0$$

$\Rightarrow$ $\underline{w_k \text{ es cero simple de } f\ \ \forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$

(b) Determinar y clasificar, si es posible, sus singularidades (incluyendo el punto ∞).

$S(f)=\{0,\pi\}$ es el conjunto de singularidades de f en $\mathbb{C}$.

$\boxed{z=0}$ $\quad f(z)=\dfrac{g(z)}{z^2}$ donde $g(z)=\dfrac{e^{i(z-\pi)}-1}{z-\pi}$ siendo $\begin{cases} g\in\mathcal{H}(\{0\}) \\ g(0)=\frac{2}{\pi}\neq 0\end{cases}$,

entonces $\underline{z=0 \text{ es un polo doble de } f}$.

$\boxed{z=\pi}$ No podemos utilizar el argumento anterior pues aunque $f(z)=\dfrac{h(z)}{z-\pi}$ siendo $h(z)=\dfrac{e^{i(z-\pi)}}{z^2}$ una función holomorfa en $z=0$, sin embargo $h(0)=0$. Utilizaremos entonces la caracterización por límites.

$$\lim_{z\to\pi}\frac{e^{i(z-\pi)}-1}{(z-\pi)z^2}\overset{\frac{0}{0},\,L'H}{=}\lim_{z\to\pi}\frac{ie^{i(z-\pi)}}{z^2+(z-\pi)\cdot 2z}=\frac{i}{\pi^2}\in\mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ $\underline{z=\pi \text{ es una singularidad evitable de } f}$

$\boxed{z=\infty}$ El comportamiento de f cerca de ∞ es el mismo de f_I cerca de 0, donde $f_I(z)=f(1/z)$, en $z=0$.

$$f(1/z)=\frac{e^{i(1/z-\pi)}-1}{(1/z-\pi)\,1/z^2}=\frac{e^{i/z}e^{-i\pi}-1}{(1-z\pi)/z^3}=\frac{z^3(e^{i/z}+1)}{z\pi-1}$$

Veamos que $\nexists \lim_{z\to 0} f(1/z)$. Sean

$A = \mathbb{R}$ y $B = \{ ix : x \in \mathbb{R},\ x>0\}$

- $\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in A}} f(1/z) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^3 (e^{i/x}+1)}{x\pi - 1} = 0$ pues

$\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x\pi - 1} = 0$ y $e^{i/x}+1$ está acotada en módulo

$(|e^{i/x}+1| \leq |e^{i/x}| + 1 = 2)$.

- $\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in B}} f(1/z) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{-i x^3 (e^{1/x}+1)}{ix\pi - 1} = \infty$ pues

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{-i}{ix\pi - 1} = i$ y $\lim_{x\to 0^+} x^3 (e^{1/x}+1) = \infty$

Por tanto, $z=0$ es una singularidad esencial de f_I y, así, $z=\infty$ es una singularidad esencial de f.

(C) Calcular los residuos de f en sus singularidades y en ∞.

- $\mathrm{Res}(f,\pi) = 0$ pues $z=\pi$ es una singularidad evitable.

- $\mathrm{Res}(f,0) = \dfrac{1}{1!} \lim_{z\to 0} \dfrac{d}{dz} z^2 \cdot \dfrac{e^{i(z-\pi)}-1}{(z-\pi) z^2} = \lim_{z\to 0} \dfrac{d}{dz} \dfrac{e^{i(z-\pi)}-1}{z-\pi}$

$$= \lim_{z\to 0} \left(\frac{i e^{i(z-\pi)}}{z-\pi} - \frac{e^{i(z-\pi)}-1}{(z-\pi)^2} \right) = \frac{-i}{-\pi} - \frac{-2}{\pi^2}$$

$$= \frac{2+i\pi}{\pi^2}$$

- $\mathrm{Res}(f,\infty) = -\left(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,\pi)\right) = -\dfrac{2+i\pi}{\pi^2}$

4.- Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^4+4}\,dx$

Como la integral es convergente coincide con su valor principal, entonces:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^4+4}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos(\pi x)}{x^4+4}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\pi x}+e^{-i\pi x}}{2(x^4+4)}\,dx$$

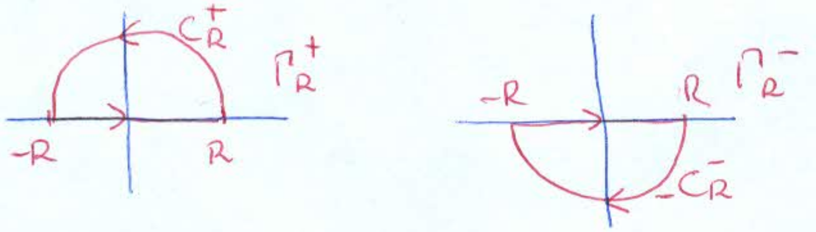
$$= \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \Bigg(\underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{e^{i\pi x}}{x^4+4}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{e^{-i\pi x}}{x^4+4}\,dx}_{I_2} \Bigg)$$

Consideramos las funciones complejas

$$f_1(z) = \frac{e^{i\pi z}}{z^4+4} \quad \text{y} \quad f_2(z) = \frac{e^{-i\pi z}}{z^4+4}$$

y los contornos $\Gamma_R^+ = [-R,R] + C_R^+$ y $\Gamma_R^- = [-R,R] - C_R^-$, siendo C_R^+ y $-C_R^-$ los arcos de la circunferencia C_R de radio 0 y centro $R>0$ que unen R con $-R$ y situados en $\operatorname{Im} z \geq 0$ e $\operatorname{Im} z \leq 0$, respectivamente; y siendo $R>0$ tal que $S(f_1) \subset \operatorname{Int}(C_R)$.

$ \overset{\shortparallel}{S(f_2)}$



Entonces:

- $\displaystyle I_1 = \int_{\Gamma_R^+} f_1(z)\,dz - \int_{C_R^+} f_1(z)\,dz$

- $\displaystyle I_2 = \int_{\Gamma_R^-} f_2(z)\,dz - \int_{-C_R^-} f_2(z)\,dz$

y, dado que $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^+} f_1(z)\,dz = 0$ y $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_R^-} f_2(z)\,dz = 0$,

, según el lema de Jordan; entonces aplicando el teorema de Cauchy de los residuos se tiene

$$I = \frac{1}{2}\Bigg(2\pi i \sum_{z_k \in S(f_1)\cap\{z:\operatorname{Im} z \geq 0\}} \operatorname{Res}(f_1, z_k) \;-\; 2\pi i \sum_{z_k \in S(f_2)\cap\{z:\operatorname{Im} z \leq 0\}} \operatorname{Res}(f_2, z_k) \Bigg)$$

$\boxed{\Gamma_R^- \text{ negativamente orientada}}$

$$S(f_1)=S(f_2)=\{z\in\mathbb{C}:\ z^4+4=0\}=\left\{\sqrt[4]{|-4|}\,e^{i(\pi+2k\pi)/4} : k=0,1,2,3\right\}$$

$$z_1=\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}=1+i$$

$$z_2=z_1\cdot e^{i2\pi/4}=z_1 i=-1+i$$

$$z_3=z_2\cdot i=-1-i$$

$$z_4=z_3\cdot i=-1+i$$

Se tiene que $S(f_1)\cap\{z: \operatorname{Im} z\geq 0\}=\{z_1,z_2\}$

$S(f_2)\cap\{z: \operatorname{Im} z\leq 0\}=\{z_3,z_4\}$

$$\operatorname{Res}(f_1,z_k)=\frac{e^{i\pi z_k}}{4z_k^3}=\frac{e^{i\pi z_k}z_k}{4z_k^4}\underset{z_k^4=-4}{\overset{\uparrow}{=}}-\frac{e^{i\pi z_k}z_k}{16}$$

$$\operatorname{Res}(f_2,z_k)=\frac{e^{-i\pi z_k}}{4z_k^3}=-\frac{e^{-i\pi z_k}z_k}{16}$$

Luego:

$$I=\pi i\left(-\frac{e^{i\pi(1+i)}(1+i)}{16}-\frac{e^{i\pi(-1+i)}(-1+i)}{16}+\frac{e^{-i\pi(-1-i)}(-1-i)}{16}+\frac{e^{-i\pi(1-i)}(1-i)}{16}\right)=$$

$$=\frac{\pi i}{16}\left(e^{-\pi}(\cancel{1}+i)+e^{-\pi}(-\cancel{1}+i)-e^{-\pi}(-\cancel{1}-i)-e^{-\pi}(\cancel{1}-i)\right)$$

$$=+\frac{\pi i}{16}\cdot 4e^{-\pi}i=\boxed{-\frac{\pi}{4e^{\pi}}}$$